Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
24.-26.10.2011

VEKTOREN UND KREUZPRODUKT

Mit diesen Übungen sollen Sie sich Vektoren und insbesondere mit den Eigenschaften des Kreuzproduktes vertraut machen.

[P5] *Drehmoment*
Das Drehmoment ist eine Größe, die durch ein Kreuzprodukt definiert ist. An einem Körper greifen an den Orten $\vec{r}_i$ die Kräfte $\vec{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, an und bewirken das Drehmoment $\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{M} \cdot \sum_i \vec{F}_i$ unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.

(b) Welche Bedingung müssen die Kräfte erfüllen, damit das Drehmoment $\vec{M}$ unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist?

[P6] *Index-Gymnastik*
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Was sind die ersten beiden Größen in Vektorschreibweise?

$$\begin{aligned} \delta_{ij} a^i b^j &= ?\,, \\ \varepsilon_{ijk} \delta_{lk} a^l b^j &= ?\,, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klj} &= ?\,, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} &= ?\,, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jnl} \varepsilon_{ilm} &= ?\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Es gilt die Einstein'sche Summenkonvention. In dieser Aufgaben unterscheiden wir nicht zwischen oberen und unteren Indizes.

[P7] *Kreuzprodukt*
Überzeugen Sie sich ganz explizit von einigen wichtigen Eigenschaften des Kreuzproduktes

(a) Es seien $a = e_1 a^1 + e_2 a^2$, $b = e_1 b^1 + e_2 b^2$ gegeben. Berechnen Sie $J(a, b)$ auf zwei Arten explizit: Verwenden Sie einmal zuerst Linearität im ersten Argument, $J(a, b) = J(e_1 a^1 + e_2 a^2, b)$, und einmal zuerst Linearität im zweiten Argument, $J(a, b) = J(a, e_1 b^1 + e_2 b^2)$. Entwickeln Sie in beiden Fällen $J(a, b)$, und zeigen Sie damit, dass in beiden Fällen $J(a, b) = J_{ij} a^i b^j$ gilt. Hierbei ist $J_{ij} = J(e_i, e_j)$. Begründen Sie, warum $J(a, b) \;?\!=\!?\; J_{ii} a^i b^i$ großer Unsinn sein muss.

(b) Vergleichen Sie die Entwicklung in Kopmponenten für ein symmetrisches $g(a, b) = g(b, a)$ und ein antisymmerisches $J(a, b) = -J(b, a)$, wobei $a = e_1 a^1 + e_2 a^2 + e_3 a^3$, $b = e_1 b^1 + e_2 b^2 + e_3 b^3$ sind.

(c) Überzeugen Sie sich mit Ihrem Ergebnis aus (b), dass das Spatprodukt aus j, a, b sich unter zyklischen Vertauschungen nicht ändert. Hierbei ist $j^1 = J_{23}$, $j^2 = J_{31}$ und $j^3 = J_{12}$.